BACCALAURÉAT BLANC GÉNÉRAL SÉRIE ES
SESSION Février 2014

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants dont un de spécialité. Le candidat doit traiter obligatoirement 4 exercices suivant l'enseignement suivi.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5. Dès que le sujet lui est remis, le candidat doit s'assurer qu'il est complet.

Exercice 1 : (5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, l'absence de réponse ou une réponse multiple ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Un bijoutier propose des perles de culture pour fabriquer des bijoux. Il dispose dans son stock de deux types de couleurs : les perles argentées et les perles noires. Chacune de ces perles a :
– soit une forme dite sphérique ;
– soit une forme dite équilibrée ;
– soit une forme dite baroque ;
De plus, 60% des perles sont argentées dont 15% sont sphériques et la moitié sont baroques. Le bijoutier choisit une perle du stock au hasard. On suppose que chaque perle a la même probabilité d'être choisie.

On considère les événements suivants :

- A : "la perle est de couleur argentée" ;
- -N : "la perle est de couleur noire" ;
- S : "la perle est de forme sphérique" ;
- -E : "la perle est de forme équilibrée" ;
- B : "la perle est de forme baroque".

1. $P(\mathrm{N})$ est égale à :

   (a) $0,15$ **(b)** $0,35$ **(c)** $0,6$ **(d)** $0,4$

2. La probabilité que le bijoutier choisisse une perle de forme équilibrée sachant qu'elle est argentée est égale à :

   (a) $0,4$ **(b)** $0,5$ **(c)** $0,35$ **(d)** $P_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})$

3. La probabilité que le bijoutier choisisse une perle argentée et de forme baroque est égale à :

   (a) $0,3$ **(b)** $0,09$ **(c)** $0,5$ **(d)** $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$

4. La probabilité que le bijoutier choisisse une perle de forme sphérique est égale à $0,29$.
   $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{S})$ est égale à :

   (a) $0,61$ **(b)** $0,5$ **(c)** $0,06$ **(d)** $0,15$

5. Pour une création de bijou original, le bijoutier choisit dans son stock quatre perles au hasard et de manière indépendante. On admet que le nombre de perles est suffisamment grand pour que le choix d'une perle soit assimilé à un tirage avec remise.
   La probabilité, arrondie à $0,001$, pour que deux perles choisies soit sphérique est égale à :

   (a) $0,254$ **(b)** $0,505$ **(c)** $0,042$ **(d)** $0,084$

Exercice 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

Le premier janvier 2014, Alice ouvre un livret d'épargne sur lequel elle dépose 6 000 €.
Elle décide de verser 900 € sur ce livret chaque premier janvier à partir de 2015 jusqu'à atteindre le plafond autorisé de 19 125 €.
On suppose dans tout cet exercice que le taux de rémunération du livret reste fixé à 2,25% par an et que les intérêts sont versés sur le livret le premier janvier de chaque année.

1. Calculer le montant des intérêts pour l'année 2014 et montrer qu'Alice disposera d'un montant de 7 035 € sur son livret le premier janvier 2015.
2. On note M_n le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année $2014+n$.
   On a donc $M_0 = 6\ 000$ et $M_1 = 7\ 035$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = 1,0225M_n + 900$.
3. Alice souhaite savoir en quelle année le montant de son livret atteindra le plafond de 19 125 €.
   On considère la suite (G_n)définie pour tout entier naturel n, par $G_n = M_n + 40\ 000$.
   a) Montrer que la suite (G_n)est une suite géométrique de raison $1,0225$.
   On précisera le premier terme.
   b) Donner l'expression de G_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $M_n = 46\ 000 \times 1,0225^n - 40\ 000$.
   c) Déduire de l'expression de M_n obtenue en **b)** l'année à partir de laquelle le plafond de 19 125 € sera atteint.

4. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer l'année à partir de laquelle le plafond sera atteint.

```
LIGNE
 1  Variables :        MONTANT est un réel
 2                     ANNÉE est un entier
 3
 4  Initialisation :   Affecter à MONTANT la valeur 6 000
 5                     Affecter à ANNÉE la valeur 2014
 6
 7  Traitement :       Tant que MONTANT< 19 125
 8                         Affecter à MONTANT la valeur 1,0225 × MONTANT + 900
 9                         Affecter à ANNÉE la valeur ANNÉE+1
10
11  Sortie :           Afficher "Le plafond du livre sera atteint en..."
12                     Afficher ANNÉE
```

a) Il suffit de modifier deux lignes de cet algorithme pour qu'il détermine l'année à partir de laquelle le plafond est atteint pour un montant versé initialement de 5 000 € et des versements annuels de 1 000 €. Indiquez sur votre copie les numéros des lignes et les modifications proposées.

b) Proposez une modification de la boucle conditionnelle pour que l'algorithme affiche également à l'écran le montant disponible au premier janvier de chaque année.

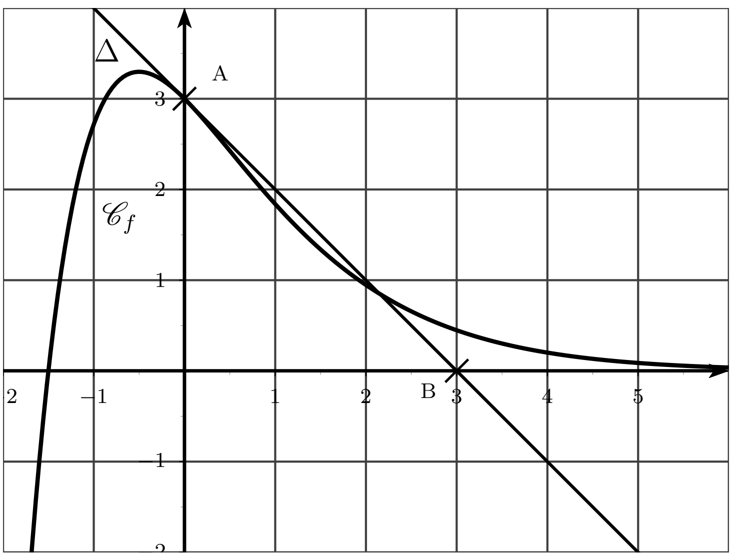
Exercice 3 : (5 points)

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représente dans un repère orthonormal une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

La droite Δ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3\ ;\ 0)$.



 Tournez, SVP

1. **a)** Déterminer graphiquement $f(0)$.

b) Déterminer graphiquement $f'(0)$.

c) La fonction f semble convexe sur $\big[0\,;\,6\big]$, en est-il ainsi ? *Justifier sans calcul votre réponse.*

2. **a)** Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.

b) À l'aide des résultats des questions **1. a)** et **1. b)**, déterminer a et b.

3. On admet pour la suite de l'exercice que $a = 2$ et que $b = 3$.

a) Calculer $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de signe de $f''(x)$ et en déduire le tableau de variations de f'.

c) Indiquer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel f est convexe et celui sur lequel f est concave.

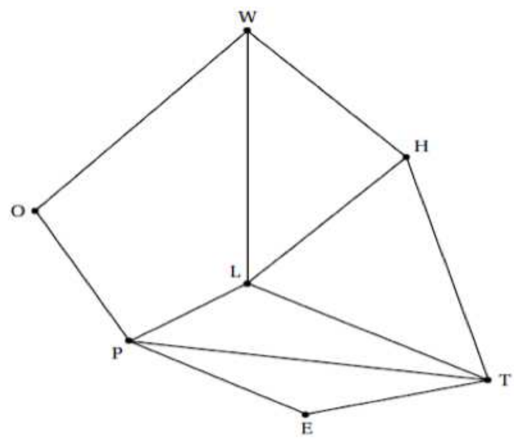
4. Justifier que $\mathscr{C}_f$ possède un point d'inflexion et donner une équation réduite de la tangente en ce point.

Exercice 4 : (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

On considère le graphe G ci-contre :



Partie A : Étude d'un graphe

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? (La réponse devra être justifiée). Si oui donner une telle chaîne.

2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? (Justifier).

3. Si oui donner un tel cycle.

4. Donner la matrice M associée au graphe G (les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : E ; H ; L ; O ; P ; T ; W).

5. Déterminer un sous-graphe complet G' de G d'ordre maximal. Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique de G ?

6. Donner un encadrement du nombre chromatique du graphe G.

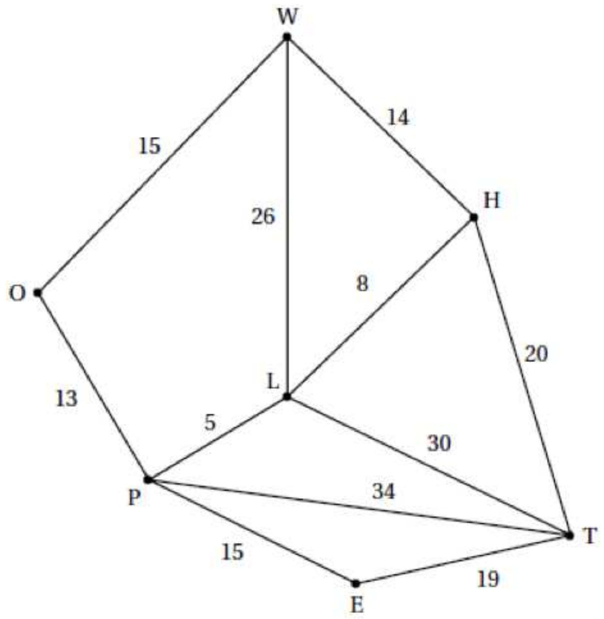
7. Proposer une coloration de G à l'aide d'un algorithme à préciser et en déduire la valeur du nombre chromatique de G.

Partie B : Voyage scolaire

La classe de Terminale d'Arthur est en voyage scolaire en Angleterre. Les professeurs organisateurs de ce voyage décident de visiter plusieurs sites de Londres.

Les sites retenus dans Londres sont les suivants : Warren Street, Oxford Circus, Piccadilly Circus, Leicester Square, Holborn, Embankment et Temple. Ces lieux sont désignés respectivement par les lettres W, O, P, L, H, E et T et sont représentés dans le graphe G donné ci-dessus (chaque sommet représente un site à visiter et chaque arête une route reliant deux sites).

Les élèves sont laissés en autonomie deux heures pour faire du shopping et ramener des souvenirs à leurs familles. Le point de rendez-vous avec les organisateurs est fixé à Temple. Les temps de parcours en minutes entre chaque sommet ont été ajoutés sur le graphe.



Arthur, qui est à Oxford Circus, n'a pas vu le temps passer. Lorsqu'il s'en rend compte, il ne lui reste plus que 40 minutes pour arriver à Temple.

1. Déterminer le plus court chemin en minutes reliant Oxford Circus à Temple.
   Justifier la réponse à l'aide d'un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ? Arthur sera-t-il en retard ?

. . . .

Voici l'exercice de vos camarades non spécialiste : ***il est présent à titre indicatif et ne doit pas être traité le jour du bac blanc****. Vous pouvez cependant le faire une fois rentré chez vous ou pendant les vacances de Février.*

Exercice 4 : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\left[1\,;\,100\right]$ par : $g(x) = x^3 - 1200x - 100$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation(s).
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[1\,;\,100\right]$.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α arrondie à l'unité.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\left[1\,;\,100\right]$.

Partie B : Soit f la fonction définie sur $\left[1\,;\,100\right]$ par : $f(x) = x + 50 + \dfrac{1200x + 50}{x^2}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ en utilisant les résultats de la question **5.** de la **Partie A**.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[1\,;\,100\right]$.